

**KARAKTERISTIKA FUNKCIJE POLITROPSKOG PROCESA SA
ASPEKTA KONSTRUKCIJE NJENE TANGENTE
A FUNCTION PROPERTY OF POLYTROPHIC PROCESS WITH ASPECT
OF TANGENT CONSTRUCTION**

B.Pejović, V.Mićić, M.Perušić, G.Tadić, S.Smiljanić

Univerzitet u Istočnom Sarajevu, Tehnološki fakultet Zvornik, RS, BiH

Izvod

U radu je polazeći od opšte jednačine tangente u proizvoljnoj tački zadate krive, primenjujući pravila diferencijalne geometrije i određene matematičke transformacije izvedena jednačina tangente politropske funkcije u segmentnom obliku, u p-v dijagramu. Ovaj oblik je pogodan za rešavanje mnogih praktičnih i teorijskih problema u tehničkoj termodinamici, primenom grafičkog postupka. Pokazano je da se tangenta može konstruisati na jednostavan način, koristeći samo jednačinu politrope, što nije slučaj sa ostalim funkcijama koje se susreću u termodinamici. U nastavku rada, date su neke mogućnosti primene izvedene osobine koje se odnose na tačniju konstrukciju politrope i grafičku analizu politropskih procesa. Na kraju rada, dat je prikaz primene izvedenih zavisnosti na jednom praktičnom primeru.

Ključne reči: proces, politropa, tangenta, grafička analiza.

Abstract

In this paper, starting from general tangent equation in arbitrary point of specified curve, using principles of differential geometry and given mathematical transformation tangent equation of polytrophic function in p – v diagram was obtained. This form is convenient for solving numerous practical and theoretical problems in engineering thermodynamic by means of graphical method. It was shown that tangent can be constructed easily, using polytrophic equation only, but it is not example with other functions appearing in thermodynamics. Later, in this paper, we have given some methods, which refer to more exact construction of polytrophic and graphical analyze of polytrophic process.

Key words: process, polytrophic, tangent, graphical analyze.

1. UVOD

Teorijski razmatrano, postoji beskonačno mnogo vrednosti specifičnog toplotnog kapaciteta, a samim tim, kada se posmatraju procesi pri kojima specifični kapacitet ostaje nepromenjen ($C=\text{const.}$), i beskonačno mnogo potpuno određenih termodinamičkih procesa. Zbog toga što svi ovi procesi imaju upravo pomenuto zajedničko svojstvo, i zbog potrebe da se ova problematika

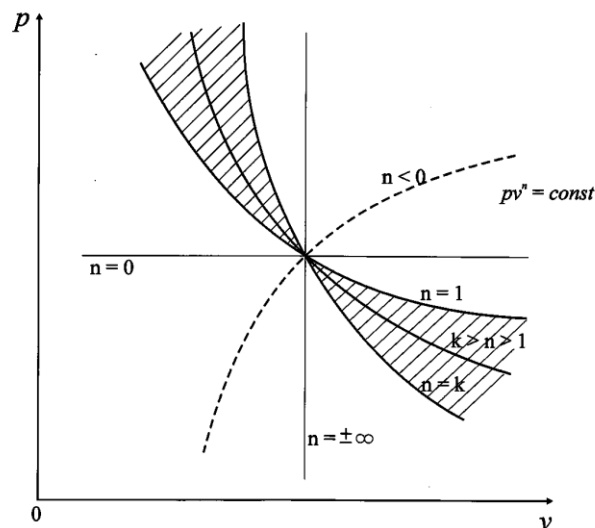
generalizuje i uopšti, uvodi se pojam politropske promene stanja. Drugim rečima, pod politropskom promenom stanja podrazumeva se neka iz široke klase kvazistatičkih promena stanja idealnog gasa za koju važi da se, u toku njenog odvijanja, specifični toplotni kapacitet ne menja, [1], [2] [3]. Iznalaženjem odgovarajućih algebarskih izraza za karakteristike politropskih promena stanja ukazuje se na mogućnost da se jednim racionalnim postupkom dođe do modela kojim se, na identičan način, izražavaju mnogobrojne moguće kvazistatičke promene stanja idealnog gasa, [3], [4], [5]. Polazeći od prvog zakona termodinamike i jednačine stanja u diferencijalnom obliku, dobija se jednačina politropske promene stanja u (p, v) koordinatnom sistemu:

$$pv^n = p_1v_1^n = const., \quad (1)$$

pri čemu n predstavlja eksponent politrope. Za dva proizvoljna stanja 1 i 2 može se napisati da je:

$$p_1v_1^n = p_2v_2^n \quad (2)$$

Treba uočiti da jednačina kvazistatičke izentropice idealnog gasa ima formalno isti oblik kao i opšta jednačina politrope i predstavlja samo njen poseban slučaj, [1], [3]. Uzajamni položaj osnovnih kvazistatičkih politropskih promena stanja u p-v koordinatnom sistemu prikazan je na sl. 1. Posebno je prikazana oblast između izotemske i izentropske promene, koja odgovara skupu različitih, tzv. tehničkih politropa, s obzirom da se javljaju kod realnih mašina, i imaju posebnu važnost za praksu, [2], [4], [5].



Slika 1. Karakteristične politropske promene stanja u p-v dijagramu

Pri rešavanju nekih praktičnih problema u tehničkoj termodinamici, pored jednačine politropske promene stanja, ukazuje se potreba i za njenom tačnom konstrukcijom u p-v dijagramu. Isto tako da bi se ova promena mogla potpuno opisati potrebno je pored analitičke izvesti i grafičku

analizu. Na primer, čest je slučaj grafičkog prikaza spoljnjih uticaja u p - v dijagramu, odnosno planimetrijskog određivanja zapreminskog i tehničkog rada, što zahteva preciznu konstrukciju politrope, [2], [4], [5]. Vezano za grafičko predstavljanje u praksi, često se koristi konstrukcija politrope po Braueru, koja je relativno komplikovana i dugotrajna uz mogućnost javljanja određenih grešaka koje se lančano povećavaju počevši od početne tačke krive, [1], [3]. Ova konstrukcija se izvodi na bazi relacije:

$$1 + tg\beta = (1 + tg\alpha)^n \quad (2-a)$$

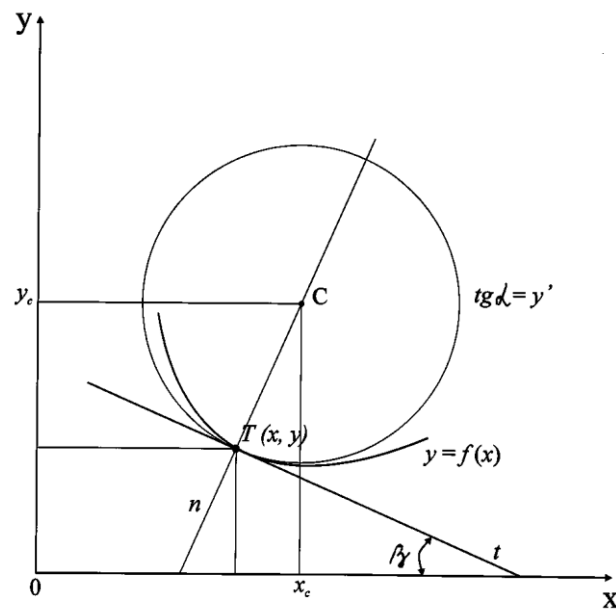
gde se uglovi α i β određuju po posebnom postupku. Pored konstrukcije politrope, neophodno je i grafičko predstavljanje njene tangente u proizvoljnoj tački, s obzirom da je kriva toliko tačno konstruisana koliko je tačno konstruisana njena tangenta. Isto tako, odgovarajući odsecci tangente i normale u nekim dijagramima, predstavljaju određene termodinamičke veličine, koje se u praksi često određuju grafički, [3], [4], [5].

2. NEKE STANDARDNE MATEMATIČKE METODE ZA KONSTRUISANJE KRIVIH I NJIHOVIH TANGENTI

U matematičkoj analizi je dokazano da se jednačina tangente na krivu $y = y(x)$ može napisati u obliku

$$Y - y = y'(X - x) \quad (3)$$

gde su (x, y) koordinate dodirne tačke, dok $y' = tg\alpha$ predstavlja izvod u dodirnoj tački, a (X, Y) koordinate ma koje tačke na tangenti, sl.2. [6], [7]. Ako se analitički, prema relaciji (3), odrede tangente u većem broju tačaka zadate funkcije $y = y(x)$, može se prema njima izvršiti konstrukcija grafika krive, sl.2. Očigledno je da je ovaj postupak konstruisanja dosta zametan i dugotrajan, posebno za slučaj kada je potrebno konstruisati veći broj tangenti, kako bi se dobila što tačnija kriva. Drugi opštiji način za konstruisanje grafika zadatih funkcija bio bi korišćenjem poluprečnika zakrivljenosti, sl.2, gde je ugao $\beta = 180 - \alpha$, [7], [8].



Slika 2. Neke matematičke metode kao pomoćno sredstvo za konstruisanje funkcije $y = f(x)$

Poluprečnik zakrivljenosti krive $y = y(x)$ u tački T apscise x , određen je metodom diferencijalne geometrije:

$$\rho = \frac{[1 + y'^2(x)]^{\frac{3}{2}}}{y''(x)} \quad (4)$$

Ovde se mora voditi računa o predznaku ispred korena s obzirom na konkavnost odnosno konveksnost krive. Koordinate centra C kružnice zakrivljenosti za tačku T biće

$$x_c = x - \frac{y'(1 + y'^2)}{y''} \quad (5-a)$$

$$y_c = y(x) + \frac{1 + y'^2}{y''} \quad (5-b)$$

Kružnica dobijene zakrivljenosti priljubljuje se uz zadatu krivu i redovno je dodiruje i seče, pa je vrlo dobro aproksimira u okolini tačke T , [6], [8]. Da bi se konstrukcija tangente olakšala često se uvode pomoćne duži: normala, subtangenta i subnormala (sl.2.). Ovo je dosta dug put za konstruisanje tangente u određenoj tački, [6], [7].

3. IZVOĐENJE ANALITIČKE ZAVISNOSTI I DOKAZ KONSTRUKCIJE

Analogno relaciji (3), jednačina tangente u dodirnoj tački $T(p, v)$ biće, sl. 3.

$$P - p = p'(V - v) \quad (6)$$

Ovde su (P, V) koordinate ma koje tačke na tangenti, gde je nagib tangente:

$$p' = \frac{dp}{dv} = \operatorname{tg} \alpha \quad (7)$$

Polazeći od jednačine (1),

$$pv^n = C^* \quad (8)$$

možemo pritisak izraziti kao,

$$p = \frac{C^*}{v^n} = C^* v^{-n} \quad (9)$$

Diferenciranjem izraza (9) prema (7) dobija se da je izvod u dodirnoj tački:

$$p' = -C^* n v^{-n-1} \quad (10)$$

Zamenom izvoda (10) u jednačinu tangente (6) biće,

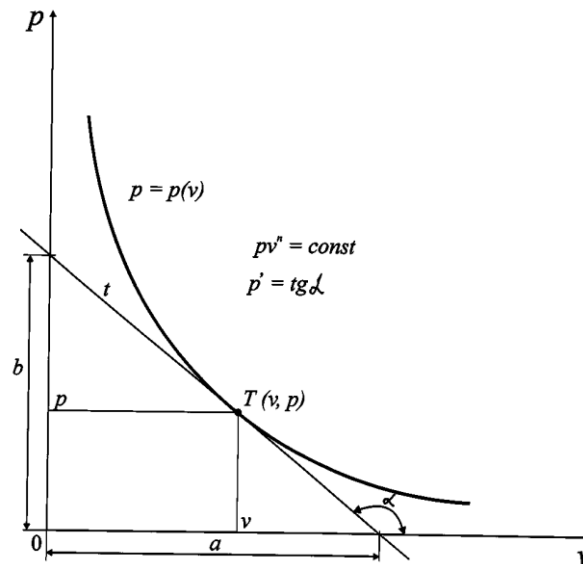
$$P - p = (-C^* n v^{-n-1}) (V - v) \quad (11)$$

Relacija (11) može se napisati u obliku,

$$P - p = (-C^* n v^{-n} v^{-1}) (V - v) \quad (12)$$

odnosno kao:

$$P - p = (-C^* v^{-n}) (-n v^{-1}) (V - v) \quad (13)$$



Slika 3. Konstrukcija tangente politropske funkcije u $p - v$ dijagramu

Koristeći relaciju (9), sledi da je:

$$P - p = -pnv^{-1}(V - v) \quad (14)$$

Očigledno, konstanta C^* je eliminisana što je bio i cilj. Oslobođanjem zagrade u izrazu (14) biće:

$$P - p = -npv^{-1}V + np \quad (15)$$

Grupisanjem članova, dobija se:

$$P + npv^{-1}V = np + p \quad (16)$$

Da bi odavde dobili segmentni oblik, podelićemo relaciju sa $(np + p)$, uz uslov $n \neq -1$. Isto tako eksponent n može biti i negativan. Sada prema (16) dobijamo:

$$\frac{npv^{-1}V}{np + p} + \frac{P}{np + p} = 1 \quad (17)$$

Relacija (17) može se napisati kao:

$$\frac{V}{\frac{np + p}{npv^{-1}}} + \frac{P}{np + p} = 1 \quad (18)$$

odnosno,

$$\frac{V}{\frac{1}{v^{-1}} + \frac{1}{nv^{-1}}} + \frac{P}{np + p} = 1 \quad (19)$$

ili:

$$\frac{V}{v + \frac{v}{n}} + \frac{P}{np + p} = 1 \quad (20)$$

Odavde se dobija tražena jednačina tangente u segmentnom obliku u tački $T(v,p)$:

$$\frac{V}{(1 + \frac{1}{n})v} + \frac{P}{(1+n)p} = 1 \quad (21)$$

Relacija (21), može se napisati radi uprošćenja kao:

$$\frac{V}{a} + \frac{P}{b} = 1 \quad (22)$$

Poređenjem sa (21), odsecci na koordinatnim osama (v, p) , biće:

$$a = (1 + \frac{1}{n})v \quad b = (1+n)p \quad (23)$$

Nagib tangente, u proizvoljnoj tački krive prema (23), biće jednostavno određen:

$$tg\beta = tg(180 - \alpha) = -p' = -\frac{dp}{dv} = \frac{b}{a} = -tg\alpha \quad (24)$$

$$tg\alpha = -\frac{(1+n)p}{(1 + \frac{1}{n})v} \quad (24')$$

Kontrolu tačnosti glavne izvedene relacije (21), možemo izvršiti koristeći uslov da tangenta mora prolaziti kroz tačku $T(v,p)$ tj. :

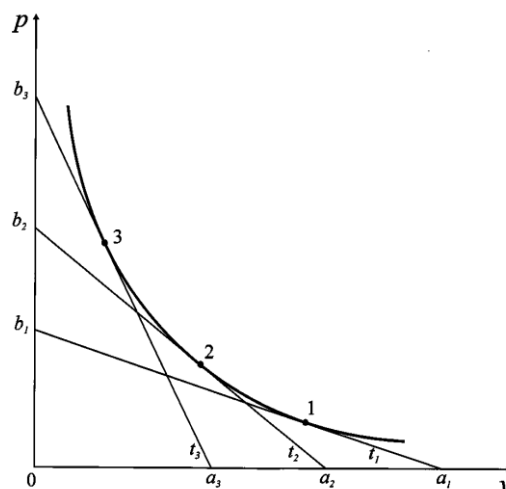
$$\frac{v}{(1+\frac{1}{n})v} + \frac{p}{(1+n)p} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{1+n} = 1 \quad (24'')$$

s obzirom da za dodirnu tačku važi da je $p \equiv P$ i $v \equiv V$.

Treba zapaziti da uzvedena relacija (21) važi za svaku realnu vrednost eksponenta politrope $n \neq -1$. Odavde proizilazi predlog za vrlo jednostavnu konstrukciju tangente u proizvoljnoj tački politrope a time i normale, korišćenjem samo njene opšte jednačine. Odsečki tangente na koordinatnim osama (p, v), zavise samo od koordinata tačaka u kojima se konstruišu iste i od eksponenta politrope, dok ne zavise od konstante C^* , što je značajno za praktičnu primenu. Ako prikazanu analitičku proceduru primenimo za ostale karakteristične funkcije koje se javljaju u tehničkoj termodinamici, lako se može zaključiti da one nemaju pokazanu osobinu, što znači da se kod istih ne može jednostavno konstruisati tangenta kao kod politrope, koristeći direktno samo njenu jednačinu. Takođe, istu osobinu poseduje vrlo malo funkcija sa kojima se operiše u matematičkoj analizi.

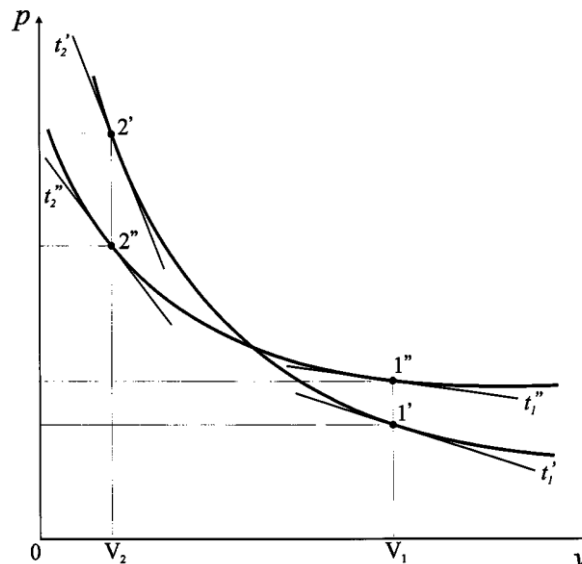
4. MOGUĆNOSTI PRIMENE IZVEDENE ZAVISNOSTI

Ako se pođe od poznatog stava iz matematičke analize, po kome je svaka kriva linija obvojnica svojih tangenti, prikazana osobina politropske funkcije, može se efikasno iskoristiti za preciznu konstrukciju njenog grafika, što je dato na sl.4. Ovde su u tri proizvoljne tačke politrope (zadate ili određene iz poznate jednačine politrope), konstruisane prema relaciji (23) odgovarajuće tangente, na bazi kojih je konstruisana politropa kao njihova obvojnica. Ovo se smatra jednom od najtačnijih metoda za konstruisanje krive. Ovde treba primetiti da se umesto dva odsečka (a, b), može koristiti samo jedan odsečak na koordinatnoj osi, čime se konstrukcija još uprošćava.



Slika 4. Politropska funkcija kao obvojnica svojih tangenti

U drugom slučaju, prema sl. 5. utvrđena osobina može se iskoristiti pri analizama različitih politropskih procesa, kako kvalitativnih tako i kvantitativnih. Konstrukcijom tangenti na primer u tačkama $v_i = const$ u dvema tačkama može se prema njihovom nagibu utvrditi intenzitet politropskog procesa kao i određena komparacija, na bazi relacija [23] i [24].



Slika 5. Primena metode pri analizi politropskih procesa $pv^n = const$.

Korišćenjem relacije (24), na jednostavan način, može se odrediti uspon (odnosno pad), u proizvoljnoj tački politrope. Ako je prvi izvod (7) u proizvoljnoj tački $M(v, p)$, po apsolutnoj vrednosti veći, to je kriva linija u okolini tačke M strmija dok je intenzitet promene veći.

5. RAČUNSKI PRIMER

Utvrđena osobina politropske funkcije prikazaće se na jednom praktičnom primeru: Idealan gas stanja 1 ($p_1 = 8.5 \text{ bar}$, $v_1 = 0.20 \text{ m}^3/\text{kg}$) ekspandira kvazistatički politropski do stanja 2 ($p_2 = 3 \text{ bar}$, $v_2 = 0.75 \text{ m}^3/\text{kg}$). Procedura se može provoditi po sledećem redosledu:

- a) Eksponent politrope se dobija logaritmovanjem relacije (2):

$$n = \frac{\log \frac{p_1}{p_2}}{\log \frac{v_2}{v_1}} = \frac{\log \frac{8.5}{3.0}}{\log \frac{0.75}{0.20}} = 0.79$$

- b) Jednačina politrope, prema (1) je:

$$p v^{0.7879} = \text{const}$$

c) Odsečki tangente na koordinatnim osama u tačkama politrope 1 i 2, prema (22) odnosno (23) biće:

$$a_1 = \left(1 + \frac{1}{n}\right) v_1 = \left(1 + \frac{1}{0.79}\right) \cdot 0.20 = 0.45$$

$$b_1 = (1+n)p_1 = (1+0.79) \cdot 8.5 = 15.20$$

$$a_2 = \left(1 + \frac{1}{n}\right) v_2 = \left(1 + \frac{1}{0.79}\right) \cdot 0.75 = 1.70$$

$$b_2 = (1+n)p_2 = (1+0.79) \cdot 3 = 5.36$$

d) Konstrukcija tangenti u tačkama 1 i 2 politrope:

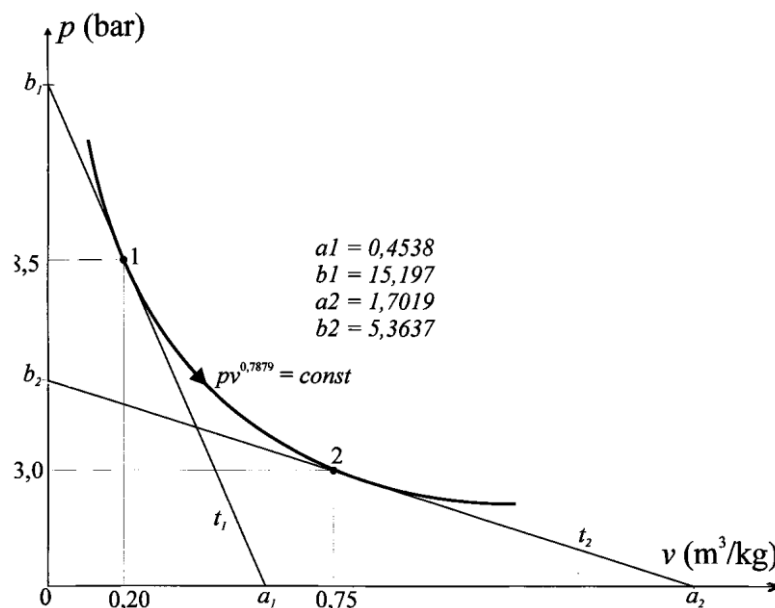
Koristeći vrednosti izračunatih odsečaka u određenoj razmeri nacrtane su tangente t_1 i t_2 a prema njima i politropa, sl. 6.

e) Kontrola tačnosti konstrukcije:

Konstruisane tangente su potpuno određene sa dve tačke dobijene preko odsečaka na koordinatnim osama. Tačnost konstrukcije se proverava preko treće odnosno dodirne tačke na krivoj.

f) Konstrukcija politrope:

Po potrebi, tangenta se po prikazanom postupku može konstruisati u bilo kojoj tački politrope što omogućuje vrlo precizno konstruisanje njenog grafika.



Slika 6. Konstrukcija politropske funkcije i njenih tangenti prema uslovima računskog primera u p-v dijagramu

6. ZAKLJUČAK

Koristeći izvedenu osobinu politropske funkcije u p - v dijagramu u obliku opšteg modela koji važi za skoro sve politrope, predložena je konstrukcija tangente na bazi njene jednačine, u bilo kojoj njenoj tački, mnogo tačnije i brže nego koristeći standardne metode razrađene u diferencijalnoj geometriji. Isto tako kontrola metode je potpuna dok se eventualne greške konstrukcije lako otkrivaju preko treće tačke koja mora ležati na odgovarajućoj tangenti. Konstrukcija se znatno uprošćava za slučaj da se koristi samo jedan odsečak tangente na jednoj od koordinatnih osa. Konstruisane tangente po prikazanom postupku omogućuju vrlo precizno konstruisanje grafika politropske funkcije. Na bazi izvedenih zavisnosti, mogu se efikasno izvršiti kako kvalitativne tako kvantitativne analize politropskih procesa, posebno pri utvrđivanju intenziteta promene i rešavanja određenih praktičnih problema grafičkim postupkom. Na bazi prikazanog rada bilo bi interesantno zasebno analizirati i slučaj $n = -1$, koji se takođe može pojaviti u tehničkoj praksi.

LITERATURA

- [1] Marić M., Maričić Đ.: Termodinamika i prenos toplote, Mašinski fakultet, Mostar, 1986.
- [2] Kozić Đ.: Termodinamika, inženjerski aspekti, Mašinski fakultet, Beograd, 2007.
- [3] Baehr H. D.: Termodinamik, Springer- Verlag, Berlin, 1983.
- [4] Black W. Z., Hartley J. G. : Thermodynamics, Harper and Row, New York, 1995.
- [5] Vejnik, A. I.: Tehničkoja termodinamika i osnovi teploperedači, Metallurgizdat, Moskva, 1986.
- [6] Mitrinović, D. S.: Matematika I i II, Građevinska knjiga, Beograd, 1997.
- [7] Bronštejn, I. N., Semendjajev K. A.: Tehnička knjiga, Zagreb, 1992.
- [8] Apsen B.: Repetitorij više matematike (I, II, III, IV), Tehnička knjiga, Zagreb, 1999.
- [9] Y. A. Cengel, M. A. Boles: Thermodynamics – An Engineering Approach. 5th ed. New York, McGraw – Hill, 2008
- [10] R. J. Ribando: Heat Transfer Tools, New York, McGraw – Hill, 2007.
- [11] Y.A. Cengel: Heat and mass transfer, A Practical Approach, Third edition, McGraw – Hill, 2007.